

RESEARCH ARTICLE

# Numerical Solution of Anisotropic Diffusion with Localized Source Using Euler Scheme and Finite Element Method

(Solusi Numerik untuk Difusi Anisotropik dengan Sumber Terlokalisasi Menggunakan Skema Euler dan Metode Elemen Hingga)

M. Ziaul Arif<sup>\*</sup>, Millatuz Zahroh, Sailah Ar Rizka

*Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember,  
Jl. Kalimantan No. 37 Kampus Tegalboto, Jember, Jawa Timur, 68121, Indonesia*

## ABSTRACT

This study investigates the numerical modeling of two-dimensional anisotropic diffusion processes involving a spatially localized and temporally limited energy or thermal source. The governing model is formulated as a parabolic partial differential equation, discretized in space using the Finite Element Method (FEM) with linear triangular elements, and in time using both explicit and implicit Euler integration schemes. To ensure spatial accuracy, a dense mesh configuration is employed, which has been shown to produce smooth and representative solution distributions. Simulation results demonstrate that the implicit Euler method exhibits superior numerical stability across various time step sizes, whereas the explicit method requires significantly smaller time steps to remain stable. Analysis of the transient regime reveals that the numerical solution gradually converges toward a steady-state configuration once the source is deactivated. These findings confirm that the combination of FEM with implicit time integration and dense meshing is effective in capturing the spatiotemporal dynamics of anisotropic diffusion processes with localized sources, a phenomenon relevant to thermal analysis, anisotropic materials, and environmental modeling.

Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan dan mengevaluasi model numerik proses difusi anisotropik dua dimensi dengan sumber energi/termal yang terlokalisasi secara spasial dan bersifat temporary. Model diformulasikan sebagai persamaan diferensial parsial parabolik yang didiskretisasi secara spasial menggunakan metode elemen hingga (Finite Element Method/FEM) berbasis elemen segitiga linier, dan secara temporal melalui skema integrasi waktu Euler eksplisit dan implisit. Untuk menjamin akurasi spasial, digunakan konfigurasi mesh padat, yang terbukti menghasilkan distribusi solusi yang halus dan representatif. Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode Euler implisit memberikan kestabilan numerik yang unggul pada berbagai ukuran langkah waktu, sedangkan metode eksplisit memerlukan langkah waktu yang sangat kecil agar tetap stabil. Analisis terhadap kondisi transien menunjukkan bahwa solusi numerik secara bertahap konvergen menuju keadaan tunak setelah sumber dimatikan. Secara keseluruhan, hasil penelitian ini menunjukkan bahwa kombinasi FEM, skema waktu implisit, dan mesh padat merupakan pendekatan yang efisien dan stabil dalam merepresentasikan dinamika spasial-temporal dari difusi anisotropik dengan sumber terbatas. Dimana suatu fenomena yang relevan dalam analisis termal, material anisotropik, dan pemodelan lingkungan.

**Keywords:** Anisotropic Diffusion, Finite Element Method, Implicit and Explicit Euler Schemes.

<sup>\*</sup>Corresponding author:  
M. Ziaul Arif  
E-mail: ziaul.fmipa@unej.ac.id

## PENDAHULUAN

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) merupakan dasar utama dalam pemodelan matematis berbagai fenomena fisis dan teknik, seperti proses difusi, konduksi panas, perpindahan massa, dan reaksi kimia [1]. Dalam banyak kasus, fenomena tersebut tidak bersifat isotropik, melainkan menunjukkan perilaku yang bergantung arah sehingga memunculkan apa yang disebut sebagai difusi anisotropik. Difusi jenis ini

terjadi ketika laju difusi bervariasi terhadap arah ruang, dan secara luas dijumpai dalam berbagai konteks aplikasi, seperti material komposit [2], jaringan biologis [3], dan media berpori [4].

Kompleksitas permasalahan meningkat secara signifikan ketika difusi anisotropik berinteraksi dengan sumber yang bersifat lokal dan aktif hanya dalam interval waktu tertentu. Fenomena seperti ini umum dijumpai dalam berbagai aplikasi, misalnya pada proses pemanasan lokal bahan Teknik [5], injeksi zat

kimia dalam jaringan biologis [6], atau penyebaran kontaminan dalam ekosistem perairan dan tanah [7]. Sumber seperti ini, yang disebut sebagai sumber terlokalisasi, menyebabkan dinamika sistem menjadi sangat sensitif terhadap distribusi spasial-temporal sumber, serta memerlukan pendekatan numerik yang mampu menangkap evolusi sistem secara akurat baik dalam fase transien maupun menuju keadaan tunak (*steady state*). Terdapat beberapa metode numerik yang umum dilakukan, misalnya metode beda hingga [8], metode elemen hingga [9], atau metode volume hingga.

Metode elemen hingga (*Finite Element Method/FEM*) telah banyak digunakan dalam menyelesaikan PDP, khususnya untuk persamaan dan domain yang kompleks dan koefisien yang bervariasi secara spasial. Dalam konteks persamaan difusi anisotropik, FEM memberikan fleksibilitas dalam mengakomodasi koefisien difusi dalam bentuk matriks, serta mendukung diskretisasi spasial yang sesuai dengan geometri alami suatu sistem. Untuk menyelesaikan persoalan dinamis yang melibatkan variabel waktu, metode ini dapat dikombinasikan dengan skema integrasi waktu seperti Euler eksplisit dan implisit [10], yang umum digunakan dalam pemodelan numerik berbasis waktu. Namun demikian, pendekatan seperti metode beda hingga dapat mengalami keterbatasan saat diterapkan pada geometri yang tidak beraturan atau kompleks [11], [12], [13], [14]. Oleh karena itu, penggunaan FEM menjadi lebih tepat dalam konteks geometri realistik.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini bertujuan untuk menyelidiki solusi numerik dari persamaan difusi anisotropik dua dimensi yang dipengaruhi oleh sumber lokal yang bersifat temporer. Formulasi lemah dari PDP diturunkan dan diselesaikan dengan menggunakan metode elemen hingga untuk diskretisasi spasial [15],[16], serta skema Euler eksplisit dan implisit untuk diskretisasi waktu. Studi ini secara khusus mengevaluasi sensitivitas solusi terhadap variasi struktur *mesh* dan langkah waktu, kestabilan selama fase transien, serta konvergensi terhadap kondisi tunak setelah sumber dinonaktifkan. Temuan dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam pengembangan teknik numerik untuk pemodelan difusi kompleks yang relevan di bidang rekayasa termal, ilmu material, dan lingkungan.

## METODE PENELITIAN

### Persamaan Difusi Anisotropik dengan Sumber Terlokalisasi

Permasalahan yang dikaji dalam penelitian ini merupakan model difusi anisotropik  $2D$ , yang digambarkan oleh suatu persamaan diferensial parsial (PDP) parabolik dengan sumber yang bersifat sementara dan terlokalisasi. Model ini diaplikasikan pada domain persegi panjang  $G = [0,10] \times [0,2]$ , yang merepresentasikan wilayah komputasi utama dalam bidang  $2D$  dengan sebuah subdomain  $\Gamma = [5.5,6.5] \times [0.75,1.25] \subset G$  yang merupakan lokasi aktif sumber. Persamaan difusi yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (d \nabla u) = f(x, y, t), \quad (1)$$

untuk  $(x, y) \in G, t > 0$

dengan syarat batas Dirichlet homogen:  $u(x, y, t) = 0$ , untuk  $(x, y) \in \partial G, t > 0$ , serta kondisi awal:  $u(x, y, 0) = 0$ , untuk  $(x, y) \in G$ . Koefisien difusi  $d$  berbentuk tensor anisotropik  $2D$ , didefinisikan sebagai matriks diagonal:

$$d = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

Dengan  $p \neq q$  yang menunjukkan bahwa laju difusi dalam arah sumbu  $x$  lebih besar dibandingkan arah sumbu  $y$  atau sebaliknya. Selanjutnya, fungsi sumber  $f(x, y, t)$  didefinisikan secara terlokalisasi terhadap elemen-elemen, sebagai berikut:

$$f(x, y, t) = \sum_{\ell} \beta_{\ell} \chi_{\ell}(x, y), \quad (2)$$

dengan:

$$\beta_{\ell} = \begin{cases} 10^{-2}, & \chi_{\ell} \in \Gamma \text{ dan } t \in [0, 0.1] \\ 0, & \beta_{\ell} = \text{lainnya} \end{cases}$$

Di sini,  $\chi_{\ell}(x, y)$  merupakan fungsi karakteristik pada elemen ke- $\ell$ , dan  $(x_{\ell}, y_{\ell})$  adalah koordinat pusat dari elemen tersebut. Definisi ini menghasilkan sumber yang hanya aktif dalam subdomain terbatas dan selama selang waktu tertentu, sehingga menyerupai proses injeksi lokal pada sistem difusi.

Selain solusi transien, studi ini juga mempertimbangkan solusi keadaan *steady-state* dari sistem yang sama, yang diperoleh dengan menghilangkan komponen waktu dari persamaan.

Dalam hal ini, bentuk persamaan menjadi:

$$-\nabla \cdot (d\nabla u) = f(x, y), \text{ untuk } (x, y) \in G, \quad (3)$$

$$u(x, y) = 0, \text{ untuk } (x, y) \in \partial G,$$

dengan  $f(x, y)$  merupakan distribusi sumber yang tidak berubah terhadap waktu. Solusi keadaan tunak ini akan digunakan untuk membandingkan perilaku jangka panjang dari solusi transien, serta sebagai validasi terhadap hasil komputasi numerik yang diperoleh.

### Metode Elemen Hingga

$$\iint_G \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx \, dy - \iint_G \nabla \cdot (d\nabla u) v \, dx \, dy = \iint_G f(x, y, t) v \, dx \, dy. \quad (4)$$

Untuk menyederhanakan suku kedua pada ruas kiri, digunakan teorema divergensi 2D (*Green's First Identity*), yang menyatakan bahwa:

$$\iint_G (\nabla \cdot F) v \, dx \, dy = - \iint_G F \cdot \nabla v \, dx \, dy + \oint_{\partial G} v (F \cdot n) ds, \quad (5)$$

dengan  $F = d\nabla u$  dan  $n$  adalah vektor normal satuan keluar dari batas  $\partial G$ . Ketika diterapkan pada suku kedua, diperoleh:

$$\iint_G (\nabla \cdot d\nabla u) v \, dx \, dy = - \iint_G d\nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy + \oint_{\partial G} v (d\nabla u \cdot n) ds. \quad (6)$$

Namun karena fungsi uji  $v$  didefinisikan dalam  $H_0^1(G)$  berdasarkan syarat batas Dirichlet homogen, maka  $v = 0$  pada seluruh batas domain  $\partial G$ , sehingga,

$$\oint_{\partial G} v (d\nabla u \cdot n) ds = 0. \quad (7)$$

Dengan demikian, penyederhanaan suku kedua menghasilkan:

$$- \iint_G (\nabla \cdot d\nabla u) v \, dx \, dy = \iint_G d\nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy. \quad (8)$$

Sehingga, bentuk lemah (*weak form*) dari permasalahan difusi anisotropik 2D dapat dituliskan sebagai:

$$\iint_G \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx \, dy + \iint_G d\nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy = \iint_G f(x, y, t) v \, dx \, dy, \in H_0^1(G). \quad (9)$$

Formulasi ini menyatakan bentuk variational dari masalah difusi anisotropik 2D yang digunakan sebagai dasar dalam penerapan metode elemen hingga. Pada

### a. Pembentukan Formulasi Lemah (*weak form*)

Formulasi lemah (*weak form*) diperoleh dengan mereformulasi bentuk kuat dari persamaan diferensial parsial 2D ke dalam bentuk integral, menggunakan ruang fungsi Sobolev  $H_0^1(G)$  yang memuat fungsi-fungsi uji dan solusi yang bernilai nol di batas domain  $\partial G$  dan memiliki turunan parsial dalam  $L^2(G)$ .

Langkah pertama adalah mengalikan kedua ruas Persamaan (1) dengan fungsi uji  $v(x, y) \in H_0^1(G)$ , kemudian mengintegrasikan terhadap domain  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Maka diperoleh bentuk integral sebagai berikut:

tahapan berikutnya, fungsi solusi  $u$  dan fungsi uji  $v$  akan didekati oleh kombinasi linier dari fungsi basis lokal yang terdefinisi pada elemen-elemen segitiga dalam domain. Dengan pendekatan ini, diperoleh sistem aljabar yang dapat diselesaikan secara numerik untuk mendapatkan solusi pendekatan dari Persamaan (1).

### b. Diskretisasi Galerkin dalam Ruang

Setelah diperoleh formulasi lemah dari masalah difusi anisotropik 2D, langkah selanjutnya dalam metode elemen hingga adalah melakukan diskretisasi dalam ruang. Pendekatan Galerkin digunakan pada tahap ini, yaitu dengan memilih ruang solusi terhingga dan ruang uji yang identik yang dibangun dari fungsi-fungsi basis lokal yang terdefinisi pada elemen-elemen segitiga dalam domain  $G$ .

Misalkan  $\mathcal{T}_h$  adalah triangulasi konform dari domain  $G$ , yaitu partisi dari  $G$  menjadi elemen-elemen segitiga yang saling lepas (kecuali pada sisi atau simpul). Selanjutnya, ruang terhingga  $V_h \subset H_0^1(G)$  didefinisikan sebagai ruang fungsi kontinu yang

bernilai nol pada  $\partial G$  dan merupakan fungsi polinomial linier (P1) pada setiap elemen  $K \in \mathcal{T}_h$ .

Ruang  $V_h$  dibentuk oleh himpunan fungsi basis  $\{\varphi_j(x, y)\}_{j=1}^N$ , yang memenuhi sifat:

$$\varphi_j(x_i, y_i) = \delta_{ij}, \quad \text{untuk } i, j = 1, 2, \dots, N,$$

dengan  $(x_i, y_i)$  adalah simpul ke- $i$  dari *mesh*,  $N$  adalah banyaknya elemen, dan  $\delta_{ij}$  adalah delta *Kronecker*.

Selanjutnya solusi diskret  $u_h(x, y, t)$  direpresentasikan sebagai kombinasi linier dari fungsi basis sebagai berikut:

$$u_h(x, y, t) = \sum_{j=1}^n V_j(t) \varphi_j(x, y), \quad (10)$$

dengan  $V_j(t)$  adalah koefisien waktu yang akan ditentukan secara numerik. Demikian pula, fungsi uji  $v$  dipilih dari ruang yang sama  $V_h$ , yaitu

$$v(x, y) = \varphi_i(x, y), \quad \text{untuk } i = 1, \dots, N.$$

Dengan mensubstitusikan bentuk diskret  $u_h$  dan  $v$  ke dalam formulasi lemah, diperoleh sistem persamaan diferensial biasa (PDB) sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^n \left( \iint_G \varphi_j \varphi_i \, dx dy \right) \frac{dV_j}{dt} + \sum_{j=1}^n \left( \iint_G (d \nabla \varphi_j) \cdot \nabla \varphi_i \, dx dy \right) V_j = \iint_G f(x, y, t) \varphi_i \, dx dy, \quad (11)$$

Dengan mendefinisikan:

- Matriks massa (*Mass Matrix*):

$$M_{ij} = \iint_G \varphi_j \varphi_i \, dx dy,$$

- Matriks kekakuan (*Stiffness Matrix*):

$$K_{ij} = \iint_G (d \nabla \varphi_j) \cdot \nabla \varphi_i \, dx dy,$$

- Vektor gaya:

$$F_i(t) = \iint_G f(x, y, t) \varphi_i \, dx dy,$$

maka sistem diskret dapat dituliskan dalam bentuk matriks:

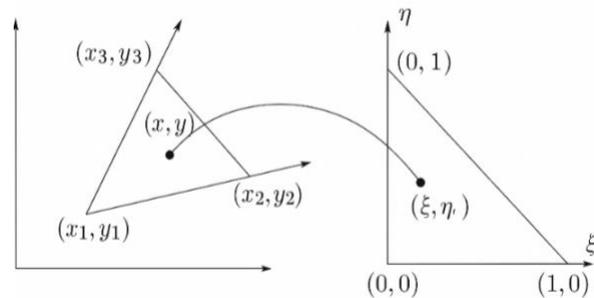
$$M \frac{dV}{dt} + K V = F(t), \quad (12)$$

dengan  $V(t) = [V_1(t), \dots, V_n(t)]^T$  adalah vektor koefisien solusi diskret terhadap waktu. Matriks  $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$  adalah matriks massa,  $K \in \mathbb{R}^{N \times N}$  adalah matriks kekakuan, dan  $F(t) \in \mathbb{R}^N$  adalah vektor gaya.

Integral pada masing-masing elemen matriks dihitung secara lokal pada elemen  $P \in \mathcal{T}_h$ , kemudian disusun menjadi sistem global melalui proses *element assembly*. Sistem semi-diskret ini menjadi dasar untuk tahap diskretisasi waktu yang akan dibahas pada bagian selanjutnya.

### c. Penyusunan Sistem Persamaan Global (*element assembly*)

Fokus pembahasan pada bagian ini adalah penyusunan matriks massa global  $M$ , matriks global  $K$  dan vektor global  $F$  dengan penekanan pada konsep elemen referensi (*master element*), transformasi koordinat, serta integrasi numerik menggunakan Gauss kuadratur. Untuk menyederhanakan integrasi numerik pada setiap segitiga, digunakan elemen referensi seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Transformasi ke elemen referensi

Semua elemen fisik pada domain dipetakan ke elemen ini menggunakan transformasi *Afine*. Dengan demikian, evaluasi fungsi basis dan integral dilakukan dalam ruang koordinat referensi. Transformasi dari elemen referensi  $(\xi, \eta)$  ke elemen fisik  $(x, y)$  dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta, \\ y(\xi, \eta) &= y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta. \end{aligned} \quad (13)$$

Transformasi ini merupakan peta linier dari segitiga referensi ke segitiga fisik. Berdasarkan transformasi ini, kita dapat membentuk matriks Jacobian  $J^e$  yang

menggambarkan perubahan skala dan orientasi antara koordinat referensi dan fisik pada elemen  $e$ . Nilai determinan dari Jacobian, yaitu  $|J^e|$ , secara geometris merepresentasikan dua kali luas elemen segitiga  $e$  yang dibatasi oleh titik-titik  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  dan  $(x_3, y_3)$ .

Selanjutnya, dalam elemen referensi pada Gambar 1, digunakan fungsi basis linier ( $P1$ ) yang didefinisikan sebagai:

$$M_{ij}^e = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \iint_{T^e} \varphi_j(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy = \iint_{\hat{T}^e} \hat{\varphi}_j(\xi, \eta) \hat{\varphi}_i(\xi, \eta) |J^e| d\xi d\eta, \quad (15)$$

dimana  $\hat{\varphi}_i(\xi, \eta)$  adalah fungsi basis dalam koordinat referensi. Integral ini dihitung secara numerik menggunakan aturan Gauss kuadratur orde dua pada segitiga, yaitu:  $(\xi, \eta) = (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$  dan  $(0, \frac{1}{2}),$  masing-masing dengan bobot  $w = \frac{1}{6}$ . Sehingga integral didekati dengan:

$$M_{ij}^e = |J^e| \sum_{k=1}^3 w_k \hat{\varphi}_j(\xi_k, \eta_k) \hat{\varphi}_i(\xi_k, \eta_k). \quad (16)$$

Setelah  $M^e$  dihitung, matriks lokal  $M^e$  pada simpul elemen ke- $e$  disusun ke dalam matriks global  $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Secara struktur, matriks massa global  $M$  memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{21}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ M_{12}^{(1)} & M_{22}^{(*)} & M_{32}^{(2)} & \dots & 0 \\ 0 & M_{23}^{(21)} & M_{33}^{(*)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & M_{N-1,1}^{(N)} \\ 0 & 0 & 0 & M_{N,N-1}^{(N)} & M_{NN}^{(N)} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

dengan:  $M_{ij}^e$  didefinisikan pada Persamaan (16) dan  $M_{ii}^{(*)} = M_{ii}^e + M_{ii}^{e+1}$ . Sebagian besar elemen  $M$  bernilai nol karena fungsi basis lokal tidak selalu terkait dengan fungsi basis lokal elemen yang lain, dan hanya elemen-elemen yang terhubung langsung yang menghasilkan kontribusi tidak nol. Dengan demikian, matriks  $M$  bersifat jarang (*sparse*) dan simetris. Bentuk matriks  $M$  tidak selalu sama dan tetap, karena bergantung dari *topologi mesh*, jumlah elemen, geometri elemen dan fungsi basis yang digunakan.

**e. Matriks  $K$  (Stiffness Matrix)**

Selain matriks massa  $M$ , komponen penting dalam sistem semi-diskret metode elemen hingga adalah

$$\hat{\varphi}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \hat{\varphi}_2(\xi, \eta) = \xi, \hat{\varphi}_3(\xi, \eta) = \eta. \quad (14)$$

Fungsi basis ini digunakan untuk melakukan interpolasi nilai solusi dalam setiap elemen segitiga, serta menjadi dasar dalam pembentukan formulasi lemah metode elemen hingga.

**d. Matriks  $M$  (Mass matrix)**

Matriks massa lokal ( $M^e \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ) pada elemen ke- $e$  ( $T^e$ ) didefinisikan sebagai:

matriks kekakuan  $K$ , yang berasal dari suku integral gradien pada formulasi lemah Persamaan (11). Matriks ini menangkap efek dari fluks dan difusi dalam sistem, khususnya dalam kasus anisotropik seperti yang dibahas dalam studi ini.

Untuk setiap elemen segitiga  $T^e$ , matriks kekakuan lokal  $K^e \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  didefinisikan sebagai:

$$K_{ij}^e = \iint_{T^e} (\nabla \varphi_i)^T d \nabla \varphi_j dx dy, \quad (18)$$

dengan  $\varphi_i$  dan  $\varphi_j$  adalah fungsi basis linear lokal, dan  $d \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  adalah matriks difusi anisotropik konstan. Untuk menyederhanakan evaluasi integral, digunakan transformasi dari domain fisik  $T^e$  ke elemen referensi  $\hat{T}$ . Gradien dalam domain fisik dihitung dari elemen referensi:

$$\nabla \varphi_i = (J^e)^{-T} \nabla \hat{\varphi}_i,$$

dengan  $J$  adalah matriks Jacobian dari transformasi affine. Gradien fungsi basis dalam  $\hat{T}$ :

$$\nabla \hat{\varphi}_1 = [-1, -1]^T, \nabla \hat{\varphi}_2 = [1, 0]^T, \nabla \hat{\varphi}_3 = [0, 1]^T.$$

Dengan transformasi ini, integral lokal menjadi:

$$K_{ij}^e = \iint_{\hat{T}^e} ((J^e)^{-T} \nabla \hat{\varphi}_j)^T d ((J^e)^{-T} \nabla \hat{\varphi}_i) |J^e| d\xi d\eta, \quad (19)$$

Karena  $\nabla \varphi$  konstan dalam satu elemen, integral dapat dievaluasi secara numerik menggunakan Gauss kuadratur segitiga orde dua dengan titik dan bobot yang sama seperti diatas, sehingga integral kekakuan lokal dihitung dengan:

$$K_{ij}^e = |J^e| \sum_{k=1}^3 w_k (\nabla \hat{\varphi}_j)^T d \nabla \hat{\varphi}_i. \quad (20)$$

Setelah diperoleh  $K^e$  untuk semua elemen  $e$ , matriks kekakuan global  $K \in \mathbb{R}^{N \times N}$  dibentuk dengan menyusun kontribusi lokal pada matriks global  $K$ . Struktur umum matriks global  $K$  adalah simetris dan jarang (*sparse*):

$$K = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{21}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ K_{12}^{(1)} & K_{22}^{(*)} & K_{32}^{(2)} & \dots & 0 \\ 0 & K_{23}^{(21)} & K_{33}^{(*)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & K_{N-1,1}^{(N)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{N,N-1}^{(N)} & K_{NN}^{(N)} \end{pmatrix} \quad (21)$$

dengan  $K_{ii}^{(*)} = K_{ii}^e + K_{ii}^{e+1}$  adalah akumulasi dari dua elemen atau lebih. Bentuk matriks  $K$  ini tidak selalu tetap, karena bergantung pada *topologi mesh*, geometri elemen, jumlah elemen, fungsi basis, dll.

**e. Vektor Gaya  $F$**

Dalam sistem semi-diskret metode elemen hingga, selain matriks massa  $M$  dan matriks kekakuan  $K$ , terdapat juga vektor gaya  $F(t)$ , yang berasal dari integral bentuk lemah terhadap fungsi sumber  $f(x, y, t)$ . Vektor ini merepresentasikan pengaruh sumber eksternal atau distribusi termal/fluida terhadap sistem secara lokal maupun global. Untuk setiap elemen segitiga  $T^e$ , vektor gaya lokal  $F^e \in \mathbb{R}^3$  didefinisikan sebagai:

$$F_i^e = \iint_{T^e} f(x, y, t) \varphi_i(x, y) dx dy, \quad (22)$$

Sama seperti pada matriks  $M$  dan  $K$ , integral dalam domain fisik  $T^e$  ditransformasikan ke elemen referensi  $\hat{T}^e$ :

$$F_i^e = \iint_{\hat{T}^e} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t) \hat{\varphi}_i |J^e| d\xi d\eta. \quad (23)$$

Selanjutnya, integral ini dievaluasi menggunakan Gauss kuadratur segitiga orde dua seperti pada Matriks  $M$  dan  $K$ . Jika  $f_k = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t)$  maka elemen dari vektor gaya lokal dihitung sebagai:

$$F_i^e = |J^e| \sum_{k=1}^3 w_k f_k \hat{\varphi}_i(\xi_k, \eta_k). \quad (24)$$

Struktur vektor gaya bersifat satu dimensi dan bergantung langsung pada distribusi dari fungsi  $f$  serta *topologi mesh*:

$$F(t) = [F_1(t), F_2(t), \dots, F_N(t)]^T,$$

dengan  $F_i(t) = \sum_{e \in \mathcal{T}_h} F_i^e$ . Karena  $\varphi_i$  memiliki dukungan lokal, maka setiap simpul hanya menerima kontribusi dari elemen-elemen yang mengandung simpul tersebut.

**Penerapan Kondisi Batas Dirichlet Homogen**

Pemodelan numerik berbasis metode elemen hingga, pemberian kondisi batas merupakan komponen esensial yang menentukan bagaimana sistem bereaksi terhadap batas domain. Pada kasus ini, digunakan kondisi batas Dirichlet homogen, yaitu kondisi di mana nilai solusi  $u$  di sepanjang batas domain ditetapkan bernilai nol.

a. Identifikasi Simpul Batas

Langkah pertama adalah identifikasi simpul-simpul batas domain. Dalam implementasi program, batas domain ditentukan dari sisi-sisi segitiga yang hanya muncul satu kali dalam keseluruhan *mesh*. Secara operasional, prosedur berikut digunakan:

1. Ekstrak semua sisi dari elemen segitiga  $T^e$ , yaitu sisi  $(n_1, n_2)$ ,  $(n_1, n_3)$ , dan  $(n_2, n_3)$ ,
2. Lakukan penyortiran dan penghapusan duplikat menggunakan operasi himpunan,
3. Sisi yang hanya muncul sekali dianggap sebagai sisi batas (*boundary edge*),
4. Semua simpul yang terlibat dalam sisi-sisi batas ini disebut sebagai simpul batas (*boundary nodes (BN)*).

Himpunan simpul batas tersebut disimpan sebagai indeks  $BN \subset \{1, 2, \dots, N\}$ .

b. Pemberlakuan Kondisi Dirichlet Homogen

Setelah simpul batas dikenali, maka kondisi Dirichlet homogen ( $u = 0$  pada  $\partial\Omega$ ) diterapkan secara langsung ke dalam sistem aljabar dengan cara sebagai berikut:

1. Mengatur nilai vektor gaya:  $F_i = 0$  untuk semua  $i \in BN$ .
2. Menetapkan nilai baris dan kolom pada matriks kekakuan dan massa menjadi nol:

$$\begin{aligned} K_{i,:} &= 0, & K_{:,i} &= 0, \\ M_{i,:} &= 0, & M_{:,i} &= 0 \end{aligned}$$

Langkah ini memberikan hasil solusi numerik secara eksplisit akan menghasilkan nilai nol pada simpul-simpul batas tersebut, konsisten dengan kondisi Dirichlet homogen. Metode ini dikenal sebagai pendekatan *strong imposition of boundary conditions*, yang secara langsung memodifikasi sistem aljabar tanpa menambahkan syarat tambahan. Keuntungannya

adalah implementasi sederhana dan konsistensi dengan metode numerik berbasis elemen hingga.

**Diskretisasi Waktu**

Setelah diperoleh sistem semi-diskret dalam ruang menggunakan metode elemen hingga, tahap selanjutnya adalah melakukan diskretisasi terhadap waktu untuk membentuk sistem aljabar yang sepenuhnya terdiskretisasi. Sistem semi-diskret tersebut memiliki bentuk:

$$M \frac{dV}{dt} + K V = F(t),$$

dengan  $M$  dan  $K$  adalah matriks massa dan kekakuan,  $V(t)$  adalah vektor solusi terhadap waktu, dan  $F(t)$  adalah vektor gaya. Untuk melakukan diskretisasi waktu, interval  $[0, T]$  dibagi menjadi  $N_t$  langkah dengan panjang waktu tetap  $\Delta t$ , sehingga waktu diskret ditulis  $t^n = n\Delta t$ . Nilai solusi pada waktu  $t^n$  dilambangkan dengan  $V^n$ .

a. Metode Euler Eksplisit

Metode Euler eksplisit menggunakan pendekatan beda hingga maju (*forward difference*) untuk menghampiri turunan waktu:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(t=t^n)} \approx \frac{(V^{n+1} - V^n)}{\Delta t}. \tag{25}$$

Dengan mensubstitusikan bentuk ini ke dalam sistem semi-diskret diperoleh:

$$M \left( \frac{(V^{n+1} - V^n)}{\Delta t} \right) + K V^n = F^n. \tag{26}$$

Penyusunan ulang persamaan di atas menghasilkan bentuk eksplisit untuk  $V^{n+1}$ :

$$V^{n+1} = V^n - \Delta t M^{-1}(K V^n - F^n). \tag{27}$$

Untuk keperluan komputasi, bentuk ini biasa ditulis:

$$\begin{aligned} A &= M^{-1} K, \\ F &= M^{-1} F^n, \\ V^{n+1} &= V^n - \Delta t (A V^n - F) \end{aligned} \tag{28}$$

b. Metode Euler Implisit

Metode Euler implisit menggunakan pendekatan beda hingga mundur (*backward difference*) untuk menghampiri turunan waktu:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(t=t^{n+1})} \approx \frac{(V^{n+1} - V^n)}{\Delta t} \tag{29}$$

Dengan substitusi ke dalam sistem semi-diskret:

$$M \left( \frac{(V^{n+1} - V^n)}{\Delta t} \right) + K V^{n+1} = F^{n+1}, \tag{30}$$

Penyusunan ulang memberikan bentuk sistem linear sebagai berikut:

$$(M + \Delta t K)V^{n+1} = M V^n + \Delta t F^{n+1}. \tag{31}$$

Dalam bentuk eksplisit untuk implementasi numerik:

$$\begin{aligned} A &= M^{-1} K, \\ F &= M^{-1} F^{n+1}, \\ V^{n+1} &= (I + \Delta t A)^{-1}(\Delta t F + V^n), \end{aligned} \tag{32}$$

dengan  $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$  adalah matriks identitas.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Deskripsi Simulasi Numerik**

Simulasi numerik dilakukan untuk menyelesaikan masalah difusi anisotropik 2D dalam domain persegi panjang  $G = [0,10] \times [0,2]$ , dengan sumber terlokalisasi dalam ruang dan waktu. Subdomain sumber terletak pada wilayah  $\Gamma = [5.5,6.5] \times [0.75,1.25] \subset G$ , dimana fungsi sumber  $f(x, y, t)$  diberikan sebagai nilai konstan  $f = 10^{-2}$  selama  $0 < t < 0.1$  dan  $f = 0$  untuk  $t \geq 0.1$ .

Koefisien difusi ( $d$ ) yang digunakan pada Persamaan (1) bersifat anisotropik dan konstan, yang mengindikasikan bahwa laju difusi pada arah  $x$  tidak sama dengan arah  $y$ . Anisotropi semacam ini mencerminkan banyak fenomena fisik dan rekayasa seperti penyebaran panas dalam media berlapis, aliran uap air dalam tanah berstruktur, serta konduktivitas dalam material komposit anisotropik. Dalam hal ini diberikan dua kasus yaitu

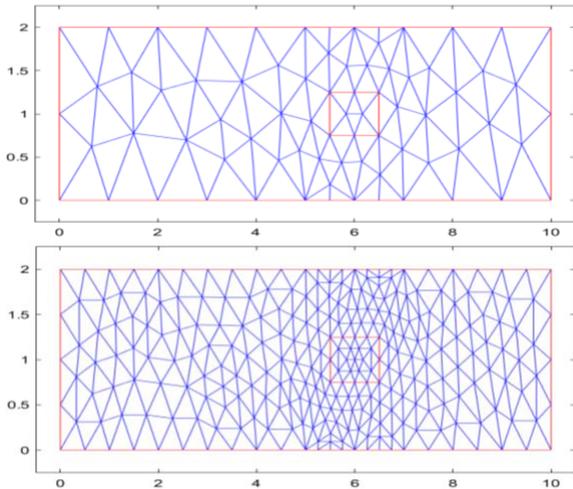
Tabel 1. Kasus anisotropik

Kasus	Nilai
1	$p = 30, q = 10$
2	$p = 10, q = 30$

Dengan  $p$  dan  $q$  masing-masing merepresentasikan nilai koefisien difusi pada arah  $x$  dan  $y$ , sehingga  $d = \text{diag}(p, q)$ . Kombinasi nilai tersebut digunakan untuk menguji pengaruh dominansi arah difusi terhadap distribusi solusi.

Selanjutnya, Untuk mengevaluasi sensitivitas solusi terhadap struktur *mesh* dan kualitas hasil numerik, dilakukan pemodelan pada tiga jenis *mesh* segitiga linier

(P1), yaitu: *Mesh* kasar (120 elemen segitiga) dan *Mesh* padat (480 elemen segitiga) seperti pada Gambar 2. Setiap konfigurasi *mesh* digunakan pada dua pendekatan diskretisasi waktu: metode Euler eksplisit dan Euler implisit. Simulasi dilakukan hingga waktu akhir  $T = 0.5$  dengan langkah waktu tetap  $\Delta t$ . Perbandingan hasil antar *mesh* dan antar metode waktu menjadi bagian dari analisis untuk mengevaluasi stabilitas, akurasi, dan kemampuan konvergensi skema numerik.

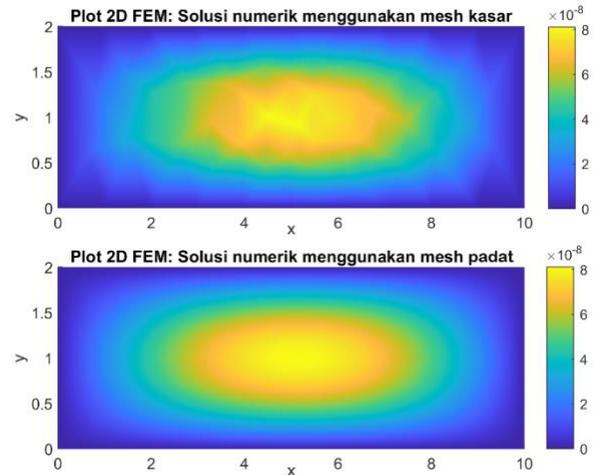


Gambar 2. Penggunaan jumlah elemen: *Mesh* kasar (atas) dan *mesh* padat (bawah)

### Hasil Simulasi

#### a. Analisis Pengaruh Jumlah Elemen terhadap Kualitas Solusi

Pemilihan struktur *mesh* merupakan aspek krusial dalam metode elemen hingga (FEM) karena berpengaruh langsung terhadap akurasi dan resolusi spasial solusi. Studi ini membandingkan *mesh* kasar dan *mesh* padat untuk mengevaluasi kualitas hasil simulasi. Gambar 3 menunjukkan bahwa *mesh* kasar menghasilkan kontur yang bersudut dan kurang presisi, terutama pada area dengan gradien tinggi, akibat keterbatasan interpolasi spasial. Sebaliknya, *mesh* padat menghasilkan kontur halus dan simetris yang mencerminkan difusi anisotropik dengan dominansi arah horizontal yang merupakan ciri khas dari sistem difusi anisotropik dengan dominansi arah  $x$ . Berdasarkan observasi ini, analisis selanjutnya difokuskan pada hasil dari *mesh* padat karena lebih stabil, akurat, dan representatif terhadap fenomena fisis yang dimodelkan.



Gambar 3. Simulasi difusi dengan *mesh* kasar (atas) dan padat (bawah). *Mesh* padat menghasilkan kontur lebih halus dan akurat.

#### b. Perbandingan Pola Difusi pada Kasus Anisotropik Arah $p > q$ dan $p < q$

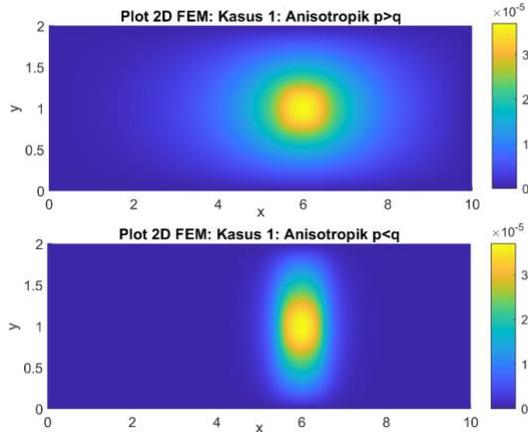
Untuk mengkaji pengaruh arah dominansi difusi terhadap perilaku solusi, dilakukan simulasi pada dua konfigurasi tensor difusi anisotropik, yaitu  $d = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$  dengan  $p > q$  dan  $p < q$ . Dalam kedua kasus, kondisi awal dan sumber diberikan secara identik, sehingga perbedaan distribusi solusi mencerminkan sepenuhnya sifat anisotropik dari sistem.

Pada kasus 1 dimana  $p > q$ , difusi lebih cepat terjadi dalam arah  $x$ , menghasilkan pola penyebaran horizontal. Visualisasi kontur menunjukkan bahwa solusi berkembang membentuk elips memanjang ke arah kanan dan kiri domain, dengan sebaran yang cepat menyelimuti arah horizontal. Ini konsisten dengan sifat fisik dari tensor  $d = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$  di mana fluks difusi lebih besar dalam arah  $x$ .

Sebaliknya, pada kasus 2 dimana  $p < q$ , difusi lebih kuat dalam arah  $y$ , sehingga solusi berkembang ke arah vertikal. Hasil numerik menunjukkan kontur yang memanjang ke atas dan ke bawah, membentuk elips vertikal. Dengan tensor  $d = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}$ , pergerakan solusi lebih lambat secara horizontal dan dominan ke arah sumbu  $y$ .

Perbandingan kedua kasus dapat dilihat pada Gambar 4, yang menunjukkan distribusi solusi pada waktu yang sama. Dalam kedua kasus, pola elips yang terbentuk sejalan dengan rasio antara komponen tensor difusi, yang menentukan kecepatan penyebaran

dalam masing-masing arah koordinat. Temuan ini menguatkan bahwa arah dominansi difusi dalam sistem anisotropik dapat diidentifikasi secara langsung dari geometri kontur solusi numerik. Oleh karena itu, metode elemen hingga dengan formulasi yang digunakan telah berhasil menangkap karakteristik fisis dari penyebaran anisotropik.

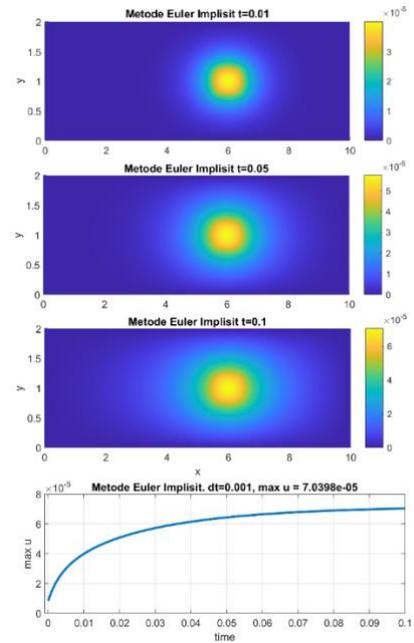


Gambar 4. Distribusi solusi numerik untuk kasus anisotropik  $p > q$  (atas) dan  $p < q$  (bawah). Kontur elips horizontal dan vertikal menunjukkan arah dominansi difusi

**c. Perbandingan Metode Euler Implisit dan Eksplisit**

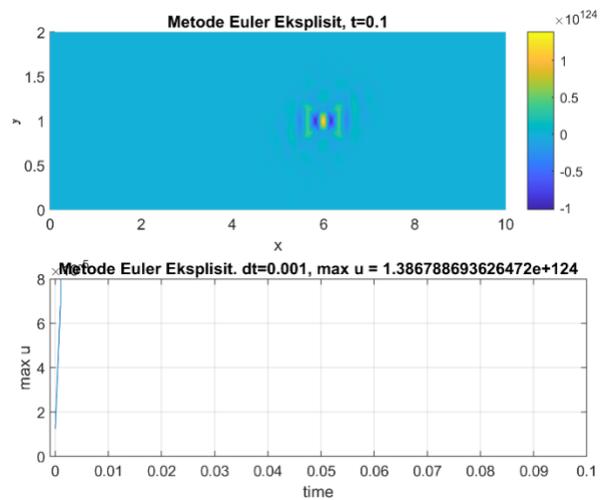
Dalam bagian ini dilakukan analisis numerik terhadap dua metode integrasi waktu orde satu, yaitu metode Euler implisit dan Euler eksplisit, dengan tujuan untuk mengevaluasi kestabilan numerik dan kualitas hasil solusi yang diperoleh dari masing-masing metode pada berbagai ukuran langkah waktu  $\Delta t$ .

Simulasi awal dilakukan dengan menggunakan metode Euler implisit pada  $\Delta t = 10^{-3}$ , yang memberikan hasil solusi stabil dan konsisten. Distribusi nilai  $u(x, y, t)$  menunjukkan evolusi yang halus dan simetris secara spasial, dengan maksimum solusi bertambah secara bertahap dan terkendali terhadap waktu, seperti ditunjukkan pada Gambar 5. Kurva pertumbuhan nilai maksimum  $u$  terhadap waktu juga memperlihatkan perilaku monoton naik menuju nilai batas, yang menunjukkan bahwa sistem mencapai keseimbangan secara numerik tanpa instabilitas.



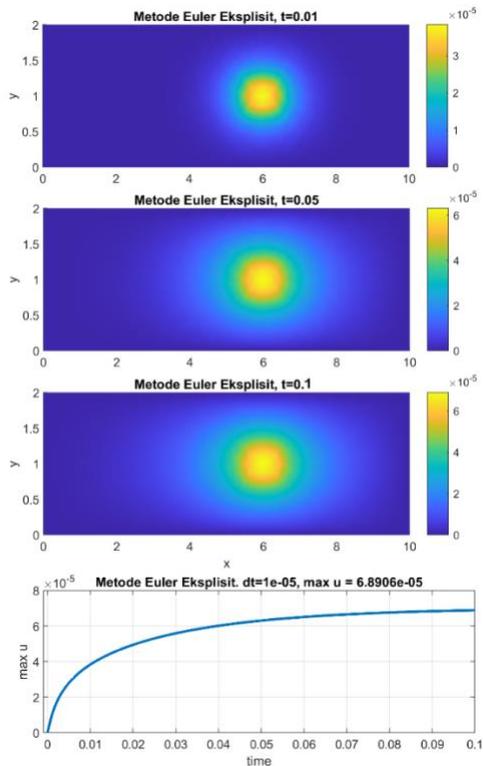
Gambar 5. Distribusi solusi numerik dan kurva pertumbuhan nilai maksimum  $u$  pada metode Euler implisit dengan  $\Delta t = 10^{-3}$

Sebaliknya, dengan metode Euler eksplisit pada ukuran waktu yang sama  $\Delta t = 10^{-3}$ , sistem menjadi tidak stabil. Gambar 6 memperlihatkan bahwa nilai maksimum  $u$  meningkat secara eksplosif hingga orde  $10^{124}$ , yang menunjukkan terjadinya ledakan numerik (*numerical blow-up*). Visualisasi distribusi solusi pada  $t = 0.1$  juga memperlihatkan pola kontur yang rusak dan tidak fisis, memperjelas bahwa metode eksplisit dengan langkah waktu tersebut tidak stabil.



Gambar 6. Ketidakstabilan solusi dengan metode Euler Eksplisit pada  $\Delta t = 10^{-3}$

Untuk mengatasi instabilitas ini, langkah waktu eksplisit diperhalus secara bertahap. Setelah dilakukan simulasi dengan  $\Delta t = 10^{-5}$ , diperoleh hasil yang konsisten dan sebanding dengan solusi implisit pada  $\Delta t = 10^{-3}$  sebagaimana terlihat pada Gambar 6.



Gambar 7. Distribusi solusi numerik dan kurva pertumbuhan nilai maksimum  $u$  pada metode Euler Eksplisit dengan  $\Delta t = 10^{-5}$

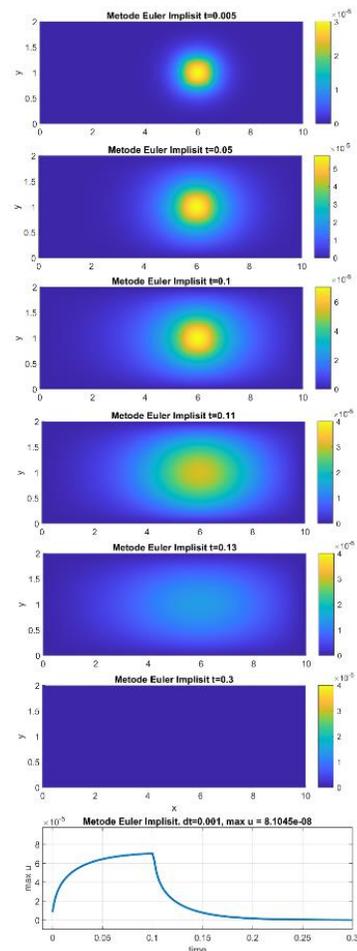
Dengan memperhatikan kestabilan dan efisiensi, metode Euler implisit lebih sesuai untuk simulasi difusi anisotropik, khususnya pada langkah waktu besar. Meskipun metode eksplisit mampu menghasilkan hasil serupa, hal ini hanya dicapai dengan langkah waktu sangat kecil, yang meningkatkan biaya komputasi. Karena itu, pendekatan implisit lebih direkomendasikan dalam konteks numerik yang stabil dan efisien.

**d. Kondisi Transien dan Konvergensi terhadap Keadaan Tunak (Steady State)**

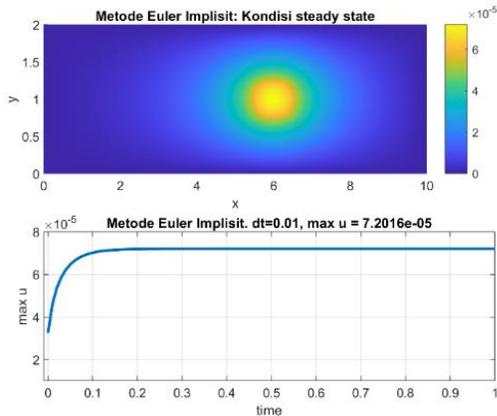
Untuk mengevaluasi dinamika solusi terhadap waktu serta kestabilan numerik, dilakukan simulasi pada dua kondisi: transien, dengan sumber aktif hanya hingga  $t = 0.1$ , dan *steady state*, dengan sumber dianggap konstan sepanjang waktu. Pada Gambar 8,

ditunjukkan simulasi transien difusi anisotropik, nilai maksimum  $u(x, y, t)$  meningkat selama sumber aktif, lalu menurun secara bertahap setelah sumber dimatikan. Distribusi solusi melebar seiring waktu, namun menghilang seiring berkurangnya energi. Kurva waktu menunjukkan kenaikan maksimum solusi hingga  $t = 0.1$ , diikuti oleh penurunan menuju nol, sejalan dengan sifat sistem parabolik tanpa sumber permanen.

Sebagai pembandingan, simulasi *steady state* memperlihatkan bahwa setelah waktu tertentu, solusi mencapai kestabilan dengan kontur simetris dan nilai maksimum yang tidak berubah signifikan seperti pada Gambar 9. Pendekatan ini digunakan untuk validasi numerik yaitu memastikan bahwa solusi transien pada waktu cukup panjang mendekati bentuk distribusi *steady state*. Hasil yang diperoleh mengindikasikan bahwa metode numerik yang digunakan akurat, konvergen, dan konsisten dalam merepresentasikan limit asimtotik dari sistem difusi yang dimodelkan.



Gambar 8. Kondisi transien difusi anisotropik



Gambar 9. Konvergensi kondisi tunak (*steady state*)

## KESIMPULAN

Studi ini mengevaluasi pemodelan numerik difusi anisotropik dua dimensi dengan sumber terlokalisasi menggunakan metode elemen hingga berbasis elemen segitiga linier, serta skema waktu Euler eksplisit dan implisit. Dua konfigurasi anisotropik diuji untuk mengamati pengaruh arah dominansi difusi, sementara variasi jumlah elemen *mesh* digunakan untuk menilai sensitivitas spasial terhadap kualitas solusi. Hasil menunjukkan bahwa metode Euler implisit secara konsisten lebih stabil dibandingkan eksplisit, terutama pada langkah waktu besar untuk optimasi komputasi, dan *mesh* padat menghasilkan kontur solusi yang lebih halus dan representatif. Simulasi transien menunjukkan konvergensi menuju kondisi *steady state*, membuktikan bahwa pendekatan numerik yang digunakan akurat dan konsisten dalam merepresentasikan karakteristik fisis dan asimtotik dari sistem difusi anisotropik yang dimodelkan. Sebagai tindak lanjut, penelitian selanjutnya dapat diarahkan pada penerapan metode ini pada geometri domain yang lebih kompleks, serta eksplorasi penggunaan elemen orde lebih tinggi untuk meningkatkan akurasi tanpa menambah kepadatan mesh secara signifikan.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] L. C. Evans, "Partial Differential Equations," *American Mathematical Society: USA*, vol. 19, pp. 889-158, 2022.  
 [2] A. M. Asoltanei, E. T. Iacob-Tudose, M. S. Secula, and I. Mamaliga, "Mathematical models for estimating diffusion coefficients in concentrated polymer

solutions from experimental data," *Processes*, vol. 12, no. 6, p. 1266, June 2024.  
 [3] L. Chen, K. Painter, C. Surulescu, and A. Zhigun, "Mathematical models for cell migration: a non-local perspective," *Philosophical Transactions of The Royal Society B*, vol. 375, no. 1807, p. 20190379, July 2020.  
 [4] P. Pandey, S. Kumar, J. F. Gómez-Aguilar, and D. Baleanu, "An efficient technique for solving the space-time fractional reaction-diffusion equation in porous media," *Chinese Journal of Physics*, vol 68, pp. 483-492, December 2020.  
 [5] A. S. Gawas and D. V. Patil, "Natural convection heat transfer with anisotropic thermal diffusion for tilted two-dimensional cavities," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol 194, p. 123000, September 2022.  
 [6] X. Liu, J. Shi, G. Yang, J. Zhou, C. Wang, J. Teng, and Z. Xie, "A diffusion anisotropy descriptor links morphology effects of H-ZSM-5 zeolites to their catalytic cracking performance," *Communications Chemistry*, vol. 4, no. 1, pp. 107, July 2021.  
 [7] A. Khaustov and M. Redina, "Anisotropy of the polyarenes distribution in the urban soil-plant systems under the conditions of transport pollution," *Applied Geochemistry*, vol 143, p. 105383, August 2022.  
 [8] J. W. Thomas, "Numerical partial differential equations: finite difference methods," *Springer Science & Business Media*, vol. 22, pp.5-40, 2023.  
 [9] B. Szabó and I. Babuška, *Finite Element Analysis: Method, Verification and Validation*, John Wiley & Sons: Hoboken, USA, 2021, pp.51-89.  
 [10] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons: Hoboken, USA, 2016, pp. 51-91.  
 [11] M. N. Özişik, H. R. Orlande, M. J. Colaço, and R. M. Cotta, *Finite Difference Methods in Heat Transfer*, Crc Press: Taylor and Francis Group, 2017, pp. 253-285.  
 [12] E. Majchrzak and B. Mochnacki, "Implicit scheme of the finite difference method for the second-order dual phase lag equation," *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 56, no. 2, pp. 393-402, April 2018.  
 [13] G. Pang, W. Chen, and K. Y. Sze, "A comparative study of finite element and finite difference methods for two-dimensional space-fractional advection-dispersion equation," *Advances In Applied Mathematics and Mechanics*, vol 8, no. 1, pp. 166-186, December 2015.  
 [14] B. Meyghani, M. B. Awang, S. S. Emamian, M. K. B. Mohd Nor, and S. R. Pedapati, "A comparison of different finite element methods in the thermal analysis of Friction Stir Welding (FSW)," *Metals*, vol. 7, no. 10, p. 450, October 2017.

- [15] M. Z. Arif, O. Lehtikangas, A. Seppänen, V. Kolehmainen, and M. Vauhkonen, “Joint reconstruction of conductivity and velocity in two-phase flows using electromagnetic flow tomography and electrical tomography: a simulation study”. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 70, pp. 1-17, October 2021.
- [16] M. Okereke and S. Keates, Finite Element Applications. A Practical Guide to The FEMA Process. Springer Cham: Switzerland, 2018, pp. 165-241.